УДК 517.98

Канонические представления на прямой, числа Эйлера и многочлены Мейкснера–Поллачека [1]

© **Л. И. Грошева**

Ключевые слова: канонические представления, преобразование Фурье, формула Планшереля, ортогональные многочлены

Канонические представления на прямой действуют в гильбертовом пространстве, снабженном некоторым нелокальным скалярным произведением. Это пространство содержит дельта-функции и их производные. Мы производим ортогонализацию обобщенных функций, сосредоточенных в начале координат. Преобразование Фурье переводит эту ортогональную систему в некоторую систему ортогональных многочленов

В настоящей работе мы рассматриваем гильбертово пространство H_λ функций на прямой $\mathbb{R}$ со скалярным произведением, ядром которого служит функция $(\operatorname{ch}(x-y))^\lambda$ (это – нелокальное скалярное произведение). В нем действует сдвигами унитарное представление U_λ группы $\mathbb{R}$ по сложению, это представление мы называем каноническим представлением группы $\mathbb{R}$ на прямой. В качестве надгруппы можно взять группу движений плоскости Лобачевского–Галилея, или, что все равно, группу гиперболических движений евклидовой плоскости, см. [Ду].

Пространство H_λ содержит дельта-функции и их производные любого порядка. Семейство дельта-функций $\delta^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, сосредоточенных в $x = 0$, не является ортогональным. Мы ортогонализуем его, находим явные формулы для обобщенных функций $F_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, полученных в результате ортогонализации, и находим для них рекуррентное соотношение.

Преобразование Фурье переводит ортогональную систему $F_n(x)$ в систему многочленов $f_n(x)$, ортогональных относительно некоторого неклассического веса. В частности, при $\lambda = -1$ этот вес есть $\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi x}{2}\right)^{-1}$, а многочлены являются многочленами Мейкснера–Поллачека.

[1]Работа поддержана Госзаданием Минобрнауки 1.3445.2011, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" 14.740.11.0349

§ 1. Пространство H_λ

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных комплекснозначных функций на прямой $\mathbb{R}$. Введем в этом пространстве скалярное произведение:

$$(f_1, f_2)_\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x)\,\overline{f_2(y)}\,(\operatorname{ch}(x-y))^\lambda\,dx\,dy, \tag{1.1}$$

где $\lambda < 0$.

Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ не является полным относительно данного скалярного произведения. Пополним его. Получим гильбертово пространство H_λ со скалярным произведением (1.1). Скалярное произведение (1.1) является нелокальным скалярным произведением, так как интегрирование ведется по плоскости $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ как группу по сложению. Мы получаем представление U группы $\mathbb{R}$ в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ сдвигами:

$$U(a)f(x) = f(x-a),\ \ a \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Это действие сохраняет произведение $(f_1, f_2)_\lambda$, поэтому оно может быть распространено на все пространство H_λ. Мы получаем унитарное представление U_λ в пространстве H_λ. По аналогии с [2] назовем его каноническим представлением группы $\mathbb{R}$ на прямой. Скалярное произведение (1.1) является аналогом формы Березина.

§ 2. Формула Планшереля

Напомним [2], что преобразование Фурье функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ есть функция

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-itx}\,dx. \tag{2.1}$$

Функция $f(x)$ восстанавливается по $\widetilde{f}(t)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{e}^{itx}\,dt. \tag{2.2}$$

Формулы (2.1), (2.2) справедливы во всяком случае для функций f из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Для функции f из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье быстро убывает на бесконечности.

Теорема 2.1 *При $\lambda < 0$ скалярное произведение $(f_1, f_2)_\lambda$ в H_λ выражается через преобразования Фурье $\widetilde{f_1}$ и $\widetilde{f_2}$ функций f_1 и f_2 следующим образом:*

$$(f_1, f_2)_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda, it)\,\widetilde{f_1}(t)\,\overline{\widetilde{f_2}(t)}\,dt, \tag{2.3}$$

где

$$w(\lambda, \sigma) = 2^{-\lambda}\,\pi\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{-\lambda+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{-\lambda-\sigma}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}\,. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы сводится к вычислению преобразования Фурье от функции $\mathrm{ch}^\lambda x$, это вычисление делается с помощью формулы [БЭ] 1.5(26).

Отметим асимптотику функции $w(\lambda, t)$ на бесконечности. Мы используем формулу [БЭ] 1.18 (6) и получаем:

$$w(\lambda, t) \sim \frac{4\pi^2}{\Gamma(-\lambda)} \, |\, t|^{-\lambda-1} \, \mathrm{e}^{-|\, t|\pi/2} \,, \quad |\, t| \to \infty,$$

мы видим, что $w(\lambda, t)$ быстро убывает при $|\, t| \to \infty$.

Теорема 2.1 дает разложение унитарного представления U_λ на неприводимые представления. В самом деле, неприводимые унитарные представления T_t, где $t \in \mathbb{R}$, группы $\mathbb{R}$ задаются формулой

$$T_t(a) = \mathrm{e}^{ita}.$$

При сдвиге (1.2) значение $\widetilde{f}(-t)$ преобразование Фурье в точке $-t$ умножается на e^{ita}, то есть на число $\widetilde{f}(-t)$ действует оператор $T_t(a)$ представления T_t. Имеет место формула обращения (2.2) и формула Планшереля (2.3).

§ 3. Аналитическое продолжение формулы Планшереля

Формулу (2.1) можно аналитически продолжить по λ с отрицательной вещественной полуоси $\lambda < 0$ на комплексные λ из левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ – той же самой формулой (2.3), где $w(\lambda, \sigma)$ дается формулой (2.4).

Теперь мы хотим продолжить это разложение по λ в правую полуплоскость. Для этого удобно переписать (2.3) в виде интеграла по мнимой оси.

Пусть f_1 и f_2 лежат в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Для функции $f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье $\widetilde{f}_1(t)$ может быть продолжено в комплексную плоскость до целой функции. Пусть $F_1(\sigma)$ – такая целая функция от σ, что $F_1(it) = \widetilde{f}_1(t)$. Аналогично, для функции $f_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ комплексно сопряженная функция $\overline{\widetilde{f}_2(t)}$ тоже может быть продолжена до целой функции. Пусть $F_2(\sigma)$ – такая целая функция от σ, что $F_2(it) = \overline{\widetilde{f}_2(t)}$.

Таким образом, для $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ разложение (2.3) может быть записано следующим образом:

$$(f_1, f_2)_\lambda = -i \int_L w(\lambda, \sigma) \, F_1(\sigma) \, F_2(\sigma) \, d\sigma, \tag{3.1}$$

где L – мнимая ось на плоскости σ, пробегаемая снизу вверх. Заметим, что подынтегральная функция является аналитической функцией от σ.

Продолжим разложение (3.1) из области $\operatorname{Re}\lambda < 0$ направо. Ограничимся случаем, когда λ не принадлежит вертикальным линиям $\operatorname{Re}\lambda = 0, 2, 4, \ldots$. Продолжим (3.1) в полосу

$$2k < \operatorname{Re}\lambda < 2k+2, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

Полюсы функции $w(\lambda, \sigma)$ по σ расположены в точках $\sigma = \lambda - 2m$ и $\sigma = -\lambda + 2m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, – из-за гамма-функций в (3.1). При продолжении по λ из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ в полосу (3.2) указанные полюсы с $m = 0, 1, 2, \ldots, k$ пересекут линию интегрирования L – мнимую ось – и дадут дополнительные слагаемые (по теореме о вычетах).

Вычеты функции $w(\lambda, \sigma)$ в полюсах $\sigma = \pm(\lambda - 2m)$ выражаются через биномиальные коэффициенты:

$$\operatorname{Res}_{\sigma=\pm(\lambda-2m)} w(\lambda, \sigma) = \pm\, 2^{-\lambda}\, \pi \binom{\lambda}{m}.$$

Поэтому мы получаем следующее разложение для λ из полосы (3.2):

$$\begin{aligned} (f_1, f_2)_\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(\lambda, it)\, \widetilde{f_1}(t)\, \overline{\widetilde{f_2}(t)}\, dt \\ &+ \sum_{m=0}^{k} \sum_{\pm} 2^{2-\lambda}\, \pi^2 \binom{\lambda}{m} F_1(\pm(\lambda - 2m))\, F_2(\pm(\lambda - 2m)) \end{aligned}$$

§ 4. Дельта-функции

Пространство H_λ содержит дельта-функции $\delta(x-a)$ и все их производные $\delta^{(k)}(x-a)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Достаточно в этом убедиться для $a = 0$. Вычислим скалярный квадрат функции $\delta^{(k)}(x)$ в смысле пространства H_λ. Имеем

$$\begin{aligned} \left(\delta^{(k)}, \delta^{(k)}\right)_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta^{(k)}(x)\, \delta^{(k)}(y)\, \operatorname{ch}^\lambda(x-y)\, dx\, dy \\ &= (-1)^k \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \left(\operatorname{ch}^\lambda x\right)\Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\delta^{(k)}(x)$ входит в H_λ.

Найдем теперь скалярное произведение функций $\delta^{(k)}(x)$ и $\delta^{(m)}(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\delta^{(k)}, \delta^{(m)}\right)_\lambda &= \int_{\mathbb{R}^2} \delta^{(k)}(x)\, \delta^{(m)}(y)\, \operatorname{ch}^\lambda(x-y)\, dx\, dy \\ &= (-1)^k \frac{d^{k+m}}{dx^{k+m}} \left(\operatorname{ch}^\lambda x\right)\Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если k и m имеют различную четность, то $\delta^{(k)}(x)$ и $\delta^{(m)}(x)$ ортогональны.

Мы видим, что вычисление скалярных произведений функций $\delta^{(k)}(x)$ и $\delta^{(m)}(x)$ сводится к разложению в ряд Тейлора функции $\mathrm{ch}^\lambda x$ в точке $x=0$. Обозначим

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{ch}^\lambda x\right)\Big|_{x=0}.$$

Ясно, что $\varphi_{2k-1}(\lambda)=0$. Мы имеем

$$\mathrm{ch}^\lambda x = \varphi_0(\lambda) + \frac{1}{2!}\,\varphi_2(\lambda)\,x^2 + \frac{1}{4!}\,\varphi_4(\lambda)\,x^4 + \dots .$$

Следовательно,

$$\left(\delta^{(k)}, \delta^{(m)}\right)_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } k+m \text{ нечетное,} \\ (-1)^k\,\varphi_{k+m}(\lambda), & \text{если } k+m \text{ четное.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Теорема 4.1 *Функции $\varphi_n(\lambda)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению*

$$\varphi_{n+2}(\lambda) = \lambda^2\,\varphi_n(\lambda) - \lambda(\lambda-1)\,\varphi_n(\lambda-2). \tag{4.2}$$

Доказательство. Вычисляем вторую производную:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{ch}^\lambda x\right)'' &= \left(\lambda\,\mathrm{ch}^{\lambda-1} x\cdot \mathrm{sh}\, x\right)' \\ &= \lambda(\lambda-1)\,\mathrm{ch}^{\lambda-2} x\cdot \mathrm{sh}^2 x + \lambda\,\mathrm{ch}^\lambda x \\ &= \lambda^2\,\mathrm{ch}^\lambda x - \lambda(\lambda-1)\,\mathrm{ch}^{\lambda-2} x. \end{aligned}$$

Теперь возьмем от этого равенства производную порядка n и положим $x=0$, мы получим (4.2). □

Приведем несколько первых коэффициентов $\varphi_n(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda) &= 1, \\ \varphi_2(\lambda) &= \lambda, \\ \varphi_4(\lambda) &= 3\lambda^2 - 2\lambda, \\ \varphi_6(\lambda) &= 15\lambda^3 - 30\lambda^2 + 16\lambda, \\ \varphi_8(\lambda) &= 105\lambda^4 - 420\lambda^3 + 588\lambda^2 - 272\lambda. \end{aligned}$$

Заметим, что значения $\varphi_n(\lambda)$ при $\lambda=-1$ – это числа Эйлера E_n:

$$\varphi_n(-1) = E_n.$$

По поводу чисел Эйлера см. [БЭ] 1.14.

Теорема 4.2 *Функции $\varphi_{2m}(\lambda)$, $m\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$, являются многочленами степени m:*

$$\varphi_{2m}(\lambda) = a_m\lambda^m + b_m\lambda^{m-1} + \dots;$$

их первые два коэффициента a_m и b_m даются формулами

$$\begin{aligned} a_m &= (2m-1)!!, && (4.3) \\ b_m &= -\frac{1}{3}\, m(m-1)\cdot(2m-1)!!; && (4.4) \end{aligned}$$

свободный коэффициент равен 0 для $m > 0$, так что $\varphi_{2m}(\lambda)$ делится на λ при $m > 0$.

Доказательство. Утверждения теоремы, кроме явных формул (4.3), (4.4), сразу вытекают из (4.2). Для коэффициентов a_m и b_m получаем сначала рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= (2m+1)\, a_m, \\ b_{m+1} &= -2m^2\, a_m + (2m-1)\, b_m. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получаем (4.3), (4.4). □

§ 5. Ортогонализация системы дельта-функций

Рассмотрим в H_λ систему дельта-функций, сосредоточенных в точке $x = 0$:

$$\delta(x),\ \delta'(x),\ \delta''(x),\ \ldots .$$

Ортогонализуем эту систему. Обозначим через $F_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, обобщенные функции, полученные в результате ортогонализации, нормированные так, что $\delta^{(n)}(x)$ входит в $F_n(x)$ с коэффициентом 1 (старший коэффициент равен 1):

$$F_n(x) = \delta^{(n)}(x) + p_{n,n-2}\cdot\delta^{(n-2)}(x) + p_{n,n-4}\cdot\delta^{(n-4)}(x) + \ldots . \qquad (5.1)$$

Приведем несколько первых обобщенных функций $F_n(x)$:

$$\begin{aligned} F_0 &= \delta, \\ F_1 &= \delta', \\ F_2 &= \delta'' - \lambda\,\delta, \\ F_3 &= \delta''' - (3\lambda-2)\,\delta', \\ F_4 &= \delta^{(4)} - 2(3\lambda-4)\,\delta'' + 3\lambda(\lambda-2)\,\delta, \\ F_5 &= \delta^{(5)} - 10(\lambda-2)\,\delta''' + (15\lambda^2 - 50\lambda + 24)\,\delta'. \end{aligned}$$

Теорема 5.1 *Для обобщенных функций $F_n(x)$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:*

$$F_n(x) = F'_{n-1}(x) + \xi_n\cdot F_{n-2}(x), \qquad (5.2)$$

где штрих означает дифференцирование по x,

$$\xi_n = -(n-1)(\lambda - n + 2). \qquad (5.3)$$

Доказательство. Разность $F_n(x) - F'_{n-1}(x)$ содержит $\delta^{(n-2)}(x)$, $\delta^{(n-4)}(x), \ldots$ и поэтому раскладывается по $F_{n-2}(x)$, $F_{n-4}(x), \ldots$. Но все последние функции, кроме $F_{n-2}(x)$, ортогональны этой разности. Поэтому имеет место формула (5.2). Вычисление коэффициента ξ_n будет сделано позже, см. конец параграфа. □

Теорема 5.2 *Обобщенные функции $F_n(x)$ выражаются в виде определителя следующим образом (мы не пишем аргументы λ и x):*

$$F_{2m} = \frac{1}{\Delta_{2m}} \begin{vmatrix} \delta^{(2m)} & \delta^{(2m-2)} & \ldots & \delta'' & \delta \\ \varphi_{2m} & \varphi_{2m-2} & \ldots & \varphi_2 & \varphi_0 \\ \varphi_{2m+2} & \varphi_{2m} & \ldots & \varphi_4 & \varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{4m-2} & \varphi_{4m-4} & \ldots & \varphi_{2m} & \varphi_{2m-2} \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

– определитель порядка $m+1$,

$$F_{2m-1} = \frac{1}{\widehat{\Delta}_{2m-2}} \begin{vmatrix} \delta^{(2m-1)} & \delta^{(2m-3)} & \ldots & \delta' \\ \varphi_{2m} & \varphi_{2m-2} & \ldots & \varphi_2 \\ \varphi_{2m+2} & \varphi_{2m} & \ldots & \varphi_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{4m-4} & \varphi_{4m-6} & \ldots & \varphi_{2m-2} \end{vmatrix} \tag{5.5}$$

– определитель порядка m. Мы используем обозначения

$$\Delta_{2m} = \begin{vmatrix} \varphi_{2m-2} & \ldots & \varphi_2 & \varphi_0 \\ \varphi_{2m} & \ldots & \varphi_4 & \varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{4m-4} & \ldots & \varphi_{2m} & \varphi_{2m-2} \end{vmatrix}, \tag{5.6}$$

$$\widehat{\Delta}_{2m} = \begin{vmatrix} \varphi_{2m} & \varphi_{2m-2} & \ldots & \varphi_2 \\ \varphi_{2m+2} & \varphi_{2m} & \ldots & \varphi_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{4m-2} & \varphi_{4m-4} & \ldots & \varphi_{2m} \end{vmatrix}, \tag{5.7}$$

это – два определителя порядка m.

Доказательство. Из (4.1) следует, что обобщенные функции $F_n(x)$, определенные (5.4) и (5.5), ортогональны дельта-функциям $\delta^{(k)}(x)$, для которых $k < n$ и имеет ту же четность, что и n (скалярные произведения выражаются определителями с одинаковыми строками). □

Вычислим для четного n второй и последний коэффициенты обобщенной функции $F_n(x)$, то есть вычислим коэффициенты $p_{2m,0}$ и $p_{2m,2m-2}$. По (5.4) мы имеем

$$p_{2m,0} = (-1)^m \frac{\widehat{\Delta}_{2m}}{\Delta_{2m}}, \tag{5.8}$$

$$p_{2m,2m-2} = -\frac{\Delta^*_{2m}}{\Delta_{2m}}, \tag{5.9}$$

где

$$\Delta_{2m}^* = \begin{vmatrix} \varphi_{2m} & \varphi_{2m-4} & \dots & \varphi_2 & \varphi_0 \\ \varphi_{2m+2} & \varphi_{2m-2} & \dots & \varphi_4 & \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{4m-2} & \varphi_{4m-6} & \dots & \varphi_{2m} & \varphi_{2m-2} \end{vmatrix}, \qquad (5.10)$$

Это – дополнительный минор для $\delta^{(2m-2)}$ в (5.4), он отличается от Δ_{2m} первым столбцом.

Таким образом, нам надо вычислить определители Δ_{2m}, $\widehat{\Delta}_{2m}$ и Δ_{2m}^*.

Вычислим сначала Δ_{2m}. Это – многочлен от λ степени $m(m-1)$. Применим к столбцам определителя (5.6) последовательно несколько раз рекуррентную формулу (4.2). Мы получим, что Δ_{2m} с точностью до числового множителя равен многочлену

$$\Phi_{2m}(\lambda) = [-\lambda(\lambda-1)]^{m-1} \cdot [-(\lambda-2)(\lambda-3)]^{m-2} \cdot [-(\lambda-4)(\lambda-5)]^{m-3} \dots, \quad (5.11)$$

так что

$$\Delta_{2m} = A_{2m} \cdot [\lambda(\lambda-1)]^{m-1} \cdot [(\lambda-2)(\lambda-3)]^{m-2} \cdot [(\lambda-4)(\lambda-5)]^{m-3} \dots . \quad (5.12)$$

Старший коэффициент A_{2m} мы получаем, заменяя в определителе (5.6) функции φ_{2k} их старшими коэффициентами $(2k-1)!!$, см. (4.3):

$$A_{2m} = \begin{vmatrix} (2m-3)!! & \dots & 1 & 1 \\ (2m-1)!! & \dots & 3!! & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (4m-5)!! & \dots & (2m-1)!! & (2m-3)!! \end{vmatrix}. \qquad (5.13)$$

Обозначим через $D(a_1, a_2, \dots, a_k)$ определитель Вандермонда:

$$D(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_k^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

он равен $\prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

Вынося в (5.13) за скобки элементы первой строки, получим

$$A_{2m} = (2m-3)!!\,(2m-5)!! \dots D(2m-1, 2m-3, \dots, 3, 1).$$

Аналогично вычисляем $\widehat{\Delta}_{2m}$. Он есть многочлен от λ степени m^2. Мы имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_{2m} &= \widehat{A}_{2m} \cdot [\lambda(\lambda-1)]^{m-1} \cdot [(\lambda-2)(\lambda-3)]^{m-2} \cdot [(\lambda-4)(\lambda-5)]^{m-3} \dots \times \\ &\times \lambda(\lambda-2)(\lambda-4) \dots (\lambda-2m+2), \end{aligned}$$

где

$$\widehat{A}_{2m} = (2m-1)!!\,(2m-3)!! \dots D(2m+1, 2m-1, \dots, 3).$$

Таким образом, из (5.8) получаем

$$p_{2m,0} = (-1)^m\,(2m-1)!!\,\lambda(\lambda-2)\dots(\lambda-2m+2). \tag{5.14}$$

Наконец, вычислим Δ^*_{2m}. Это – многочлен от λ степени m^2-m+1 (его степень на 1 больше, чем степень Δ^*_{2m}).

Для функций $\varphi(\lambda)$ обозначим через S сдвиг на 2 и через L – "конечную разность" $S-1$, то есть

$$\begin{aligned} S\varphi(\lambda) &= \varphi(\lambda-2),\\ L\varphi(\lambda) &= \varphi(\lambda-2)-\varphi(\lambda). \end{aligned}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} L^{k-1}\lambda^k &= (-2)^{k-1}\,k!(\lambda-k+1), &(5.15)\\ L^{k-1}\lambda^{k-1} &= (-2)^{k-1}\,(k-1)!, &(5.16)\\ L^{k-1}\lambda^s &= 0,\quad s<k-1, &(5.17) \end{aligned}$$

Применим к строкам определителя (5.10) последовательно несколько раз рекуррентную формулу (4.2). Мы получим его в виде

$$\Delta^*_{2m} = \Phi_{2m}(\lambda)\begin{vmatrix} \varphi_{2m} & \varphi_{2m-4} & \dots & \varphi_2 & 1\\ S\varphi_{2m} & S\varphi_{2m-4} & \dots & S\varphi_2 & 1\\ S^2\varphi_{2m} & S^2\varphi_{2m-4} & \dots & S^2\varphi_2 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ S^{m-1}\varphi_{2m} & S^{m-1}\varphi_{2m-4} & \dots & S^{m-1}\varphi_2 & 1 \end{vmatrix},$$

где $\Phi_{2m}(\lambda)$ дается формулой (5.11). Теперь к каждой строке с номером $k = 2,3,\dots,m$ применим оператор L^{k-1}. В силу (5.15), (5.16), (5.17) получим треугольный определитель, у которого вся диагональ – числовая, за исключением последнего места, на котором стоит линейная по λ функция $L^{m-1}\varphi_{2m}$. Используя (4.3), (4.4) и (5.15), (5.16), (5.17), мы получаем, что

$$L^{m-1}\varphi_{2m} = \mathrm{const}\cdot\left(\lambda-\frac{4m-4}{3}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta^*_{2m} &= A^*_{2m}\cdot\left(\lambda-\frac{4m-4}{3}\right)\times\\ &\times\ [\lambda(\lambda-1)]^{m-1}\cdot[(\lambda-2)(\lambda-3)]^{m-2}\cdot[(\lambda-4)(\lambda-5)]^{m-3}\cdot\dots \end{aligned} \tag{5.18}$$

Старший коэффициент A^*_{2m} мы получаем, заменяя в определителе (5.10) функции φ_{2k} их старшими коэффициентами $(2k-1)!!$, см. (4.3):

$$A^*_{2m} = \begin{vmatrix} (2m-1)!! & (2m-5)!! & \dots & 1 & 1\\ (2m+1)!! & (2m-3)!! & \dots & 3!! & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (4m-3)!! & (4m-7)!! & \dots & (2m-1)!! & (2m-3)!! \end{vmatrix}.$$

Вычисляем:

$$A^*_{2m} = (2m-1)!!\,(2m-5)!!\,\ldots\, D(2m+1, 2m-3, \ldots, 3, 1), \tag{5.19}$$

так что по (5.9), (5.12), (5.18), (5.19) получаем

$$p_{2m,2m-2} = -m(2m-1)\cdot\left(\lambda - \frac{4m-4}{3}\right),$$

или, заменяя $2m$ на n, получаем

$$p_{n,n-2} = -\frac{n(n-1)}{2}\,\lambda + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}\,, \tag{5.20}$$

– пока для четного n.

Теперь мы можем вычислить ξ_n. Для четного n имеем

$$\xi_n = \frac{p_{n,0}}{p_{n-2,0}}\,.$$

Подставляя сюда (5.14), получаем как раз формулу (5.3) – пока для четного n. С другой стороны, для вторых коэффициентов $p_{n,n-2}$ равенство (5.2) дает

$$p_{n,n-2} = p_{n-1,n-3} + \xi_n. \tag{5.21}$$

Здесь нам известны $p_{n,n-2}$ и ξ_n для четного n. Отсюда находим $p_{n-1,n-3}$ для четного n, тем самым $p_{n,n-2}$ для нечетного n. Это – в точности формула (5.20). Таким образом, формула (5.20) справедлива для всех n – как четных, так и нечетных. Теперь из (5.21) находим ξ_n для нечетного n. Оказывается, ξ_n для нечетного n дается в точности формулой (5.3).

§ 6. Ортогональные многочлены

Применим к обобщенным функциям из § 5 преобразование Фурье. Для дельта-функции $\delta^{(n)}(x)$ ее преобразование Фурье есть

$$\widetilde{\delta^{(n)}}(t) = \frac{i^n}{2\pi}\, t^n,$$

а для обобщенной функции $F_n(x)$ – некоторый многочлен степени n. Пусть $f_n(t)$ – такой многочлен, что

$$\widetilde{F_n}(t) = \frac{i^n}{2\pi}\, f_n(t).$$

Из (5.1) получаем

$$f_n(t) = t^n - p_{n,n-2}\cdot t^{n-2} + p_{n,n-4}\cdot t^{n-4} - \ldots.$$

Приведем несколько первых многочленов:

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= 1, \\
f_1(t) &= t, \\
f_2(t) &= t^2 + \lambda, \\
f_3(t) &= t^3 + (3\lambda - 2)\, t, \\
f_4(t) &= t^4 + 2(3\lambda - 4)\, t^2 + 3\lambda(\lambda - 2), \\
f_5(t) &= t^5 + 10(\lambda - 2)\, t^3 + (15\lambda^2 - 50\lambda + 24)\, t.
\end{aligned}$$

Соотношение (5.2) дает рекуррентное соотношение для $f_n(t)$:

$$f_n(t) = t f_{n-1}(t) - \xi_n \cdot f_{n-2}(t), \tag{6.1}$$

где ξ_n дается формулой (5.3).

Многочлены $f_n(t)$ образуют ортогональную систему на прямой с весом $w(\lambda, it)$, см. (2.4). Это – многочлены Мейкснера–Поллачека, см. [2] 10.21. Явные формулы в виде определителей получаются, если в (5.4) и (5.5) заменить дельта-функции $\delta^{(n-2k)}(x)$ степенями $(-1)^k\, t^{n-2k}$.

В частности, при $\lambda = -1$ вес есть

$$w(-1, it) = 2\pi^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi x/2)}\,.$$

В этом случае в формулах (5.4) – (5.7) надо сделать указанную замену дельта-функций на $(-1)^k\, t^{n-2k}$ и заменить φ_{2k} на числа Эйлера E_{2k}. Рекуррентное соотношение (6.1) для $f_n(t)$ приобретает вид:

$$f_n(t) = t f_{n-1}(t) - (n-1)^2 \cdot f_{n-2}(t).$$

Литература

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра, М.: Наука, 1965.

2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, М.: Наука, 1966.

3. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Представления группы SL(2,R), где R – кольцо функций. Успехи матем. наук, 1973, том 28, № 5, 83–128.

4. Ю. В. Дунин. Канонические представления на плоскости Лобачевского–Галилея. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2012, том 17, вып. 1, 82–85.

Поступила в редакцию 16 ноября 2012 года

L. I. Grosheva. Canonical representationson the real line, Euler numbers, and Meixner–Pollaczek polynomials

Keywords: canonical representations, Fourier transform, Plancherel formula, orthogonal polynomials

Canonical representations on the real line act on a Hilbert space equipped with a nonlocal inner product. This space contains delta functions and all their derivatives. We orthogonalize the system of distributions cocncentrated at zero. The Fourier transform transfers this orthogonal system to a system of orthogonal polynomials